光学傅里叶变换与光信息处理

用光学方法实现二维函数的傅立叶变换，在频域中描述和处理光学信息，是傅立叶光学的基本内容，也是光学图象处理的重要方法之一。

携带信息的光波，它可以借助于光波的温度（振幅）、位相、颜色和偏振态等表现出来，并通过记录介质的物理和化学性质予以记录。一般来说，为了信息传递方便需对光信息进行调制，为了保密等原因需“编码”，而且信息在传递过程中的“失真”和“噪声”需要通过“处理”加以恢复和去除，所以信息处理的基本内容是对已获得的光信息进行加工或变换，以达到提取所需信息的目的，或是识别某种特定的信息，或是恢复增强某种信息等等。光信息处理包括对光信息进行处理；用光学手段处理信息；以光信息的方式来表示处理结果。通过本实验可以把透镜成像与干涉、衍射联系起来，初步了解透镜的傅里叶变换性质，从而有助于对现代光学信息处理中的空间频谱和空间滤波等概念的理解。

实验 1　阿贝成像原理和空间滤波

【实验原理】

在相干平行光照明下，显微镜的物镜成像可以分成两步：①入射光经过物的衍射在物镜的后焦面上形成夫琅禾费衍射图样；②衍射图样作为新的子波源发出的球面波在像平面上相干叠加成像。

一、阿贝成像原理

阿贝提出的二次衍射成像过程，经过计算可以证明实质上是以复振幅分布描述的物光函数$U(x,y)$，经傅里叶变换成为焦平面（频谱面）上按空间频谱分布的复振幅——频谱函数$U'(x',y')$。频谱函数再经傅里叶逆变换即可获得像平面上的复振幅分布——像函数$U''(x'',y'')$。　也就是说透镜本身就具有实现傅里叶变换的功能。

为便于说明这两步傅里叶变换，先以熟知的一维光栅做物，考察其刻痕经凸透镜成像情况（图 1）。当单色平行光束透过置于物平面 xoy 上的光栅（刻痕顺

着 y 轴，垂直于 x 轴）后，衍射出沿不同方向传播的平行光束，其波阵面垂直于 xoz 面（ z 沿透镜光轴），经透镜聚焦，在其焦平面 $x'oy'$ 上形成沿 x' 轴分布的各具不同强度的衍射斑，继而从各斑点发出的球面光波到达像平面 $x''oy''$，相干叠加形成的光强分布就是光栅刻痕的放大实像。

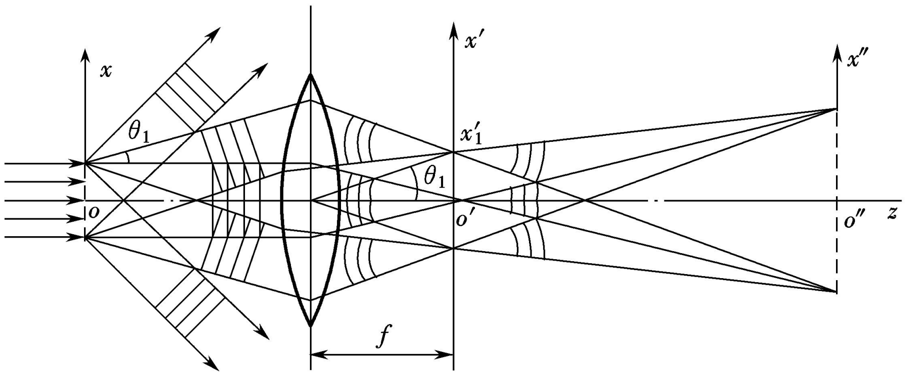


图 1　阿贝成像原理

一般情况下，以 $U(x,y)$ 表示物平面上物光的复振幅分布，经过傅里叶变换同样可以分解成以各种不同振幅向空间各个方向传播的平面波，被透镜会聚于频谱面的不同位置处。不难想像，若物函数不是简单的周期函数，这种分解也将变成连续频谱函数 $U'(x',y')$，频谱面上坐标 (x',y') 点对应的空间频率 $\mathrm{f_x}=x'/\lambda\mathrm{f}$，$\mathrm{f_y}=\mathrm{y}'/\lambda\mathrm{f}$。傅里叶变换以积分形式表达为：

$$U(x,y)=\mathrm{C}\iint \mathrm{U}'(\mathrm{f_x},\mathrm{f_y})\exp\left[j2\pi(\mathrm{f_x}x+\mathrm{f_y}y)\right]d\mathrm{f_x}d\mathrm{f_y} \quad (1)$$

其中

$$\mathrm{U}'(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{C}'\iint \mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y})\exp\left[-\mathrm{j}2\pi(\mathrm{f_x x}+\mathrm{f_y y})\right]\mathrm{dxdy} \quad (2)$$

式中：C 及 C′是常数。

把频谱函数 $U'(\mathrm{f_x},\mathrm{f_y})$ 再做一次逆变换即获得像函数 $U''(x'',y'')$，可以证明在理想的变换条件下有

$$U''(x'',y'')=(\lambda\mathrm{f})^2U(x,y) \quad (3)$$

表明像场函数与物函数完全相似。

实际上，在透镜成像过程中，受透镜孔径所限，总会有一部分角度较大的衍射光（高频信息）不能进入透镜而失掉。使像的边界变得不锐，细节变得模糊，这是限制显微镜分辨率的根本原因。

二、空间滤波

概括地说，上述成像过程分两步：先是“衍射分频”，然后是“干涉合成”。所以如果着手改变频谱，必然引起像的变化。在频谱面上作的光学处理就是空间滤波。

【实验内容】

1. 光路调节

先使氦氖激光束平行于导轨，再通过由凸透镜L_1和L_2组成的倒装望远镜（图2），形成截面较大的平行于光具座导轨的准直光束（要用带毫米方格纸或坐标轴的光屏在导轨上仔细移动检查），然后加入带栅格的透明字模板（物）和透镜L，调好共轴，移动L，直到2 m以外的像屏上获清晰像。移开物模板，用一块毛玻璃在透镜L的后焦面附近沿导轨移动，寻找激光的最小光点与像屏上反映的毛玻璃透射最大散斑的相关位置，以确定后焦面（频谱面）并测出透镜的焦距 f 。调节完毕，移开毛玻璃。

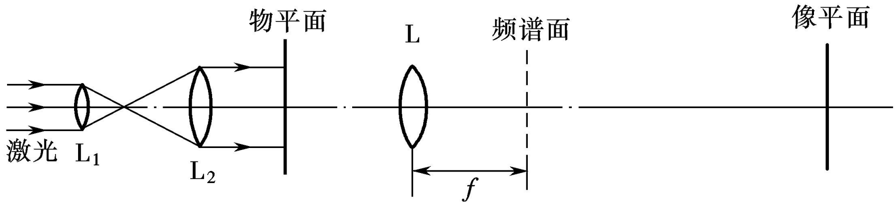


图2　阿贝成像原理实验光路示意

2. 阿贝成像原理的实验验证

（1）在物平面置一维光栅，观察像平面上的竖直栅格像，接着分别测量频谱面上对称的1、2、3级衍射斑至中心轴的距离x'_n，据式$f_x = x'_n/\lambda f$计算空间频率f_x和光栅常量d。在频谱面上置放可调狭缝或其他光栏，分别选择通过不同（如全部、0级、0和±1级、0和±2、除0级外其他全部通过）的频率成分作观察记录。

（２）把成像系统的物换成正交光栅（图 3），观察并记录频谱和像，再分别用小孔和不同取向的可调狭缝光栏，让频谱的一个或一排（横排、竖排及４５°斜向）光点通过，记录像的特征，测量像面栅格间距变化，作简单解释。

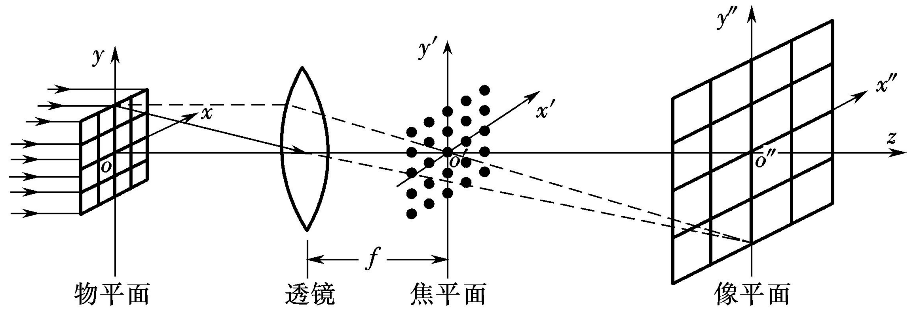


图 3　正交光栅的二步成像

3.空间滤波

（１）低通和高通滤波。

把一个带正交网格的透明字模板置于成像光路的物平面，试分析此物信号的空间频率特征（字对应非周期函数，有连续频谱，笔划较粗，其频率成分集中在光轴附近；网格对应周期函数，有分立谱），试验滤除像的网格成分的方法。

（２）把成像物换成透光十字板，用一个圆屏光栏遮挡其频谱的中部区域，观察并记录像的变化，再用可调狭缝光栏分别选择通过水平、竖直及斜向频谱成分，观察像的变化。

（３）比较两个正交光栅（d 相同，a／ d 不同）的滤波效果，在分别挡住其频谱的中央零级时，像的对比度反转是否有所不同，试作简单解释。

【思考题】

1. 如何从阿贝成像原理来理解显微镜的分辨本领？提高物镜的放大倍数能够提高显微镜的分辨本领吗？

2. 阿贝成像原理与光学空间滤波有什么关系？

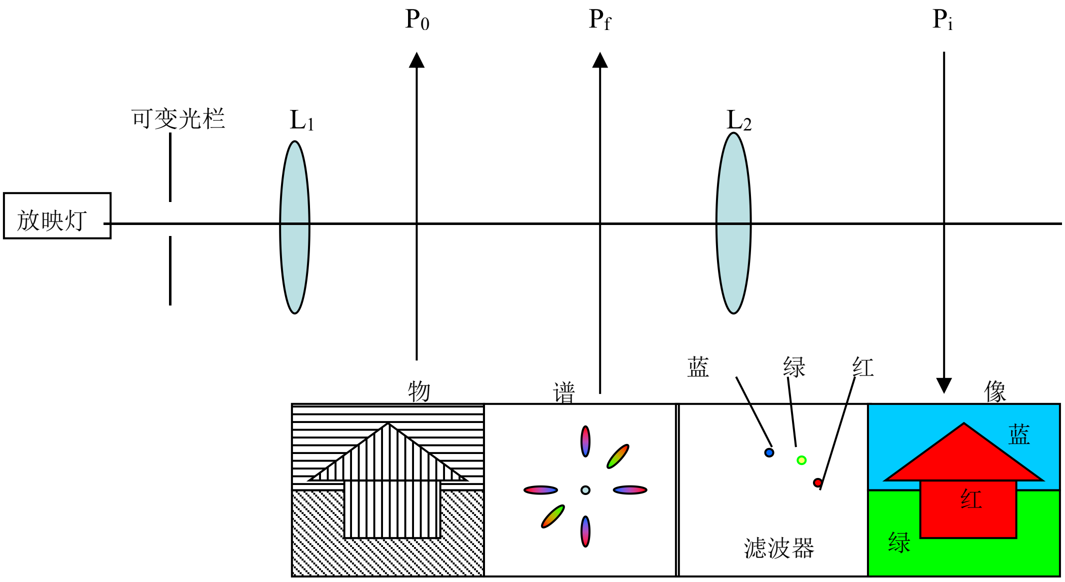
3. 单色光通过透镜前焦面上的 100 条线/mm 光栅，在后焦面上得到一排衍射极大。已知透镜焦距为 5cm，波长 632.8nm，其相应的空间频率是多少？后焦面上两个相邻极大值间的距离是多少？

实验 2　θ调制实现图像的假彩色编码

【实验原理】

θ调制是一种白光信息处理技术，它是指用不同方位角（θ）的光栅分别对输入图像的不同区域预先进行调制。这样制成的输入透明片放入相干系统的物面（P_0）上，经光源照明，则在频谱面上图像各区域相应的频谱会出现在不同方位上。例如图 4，房子、草地和天分别由三种不同取向的光栅组成。

当系统用白光照明时，每一种单色光成分通过图案的各组成部分，都将在透镜 L_2 的后焦面上产生与各部分对应的频谱，合成的结果，除中央零级是白色光斑外，不同方位光栅的其他级频谱均呈彩虹颜色的光斑。你可以在频谱面上置一纸屏(或空间滤波器)，先辨认各行频谱分别属于物图案中的哪一部分，再按配色的需要选定衍射的取向角，即在纸屏的相应部位用针扎一些小孔，就能在毛玻璃屏上得到预期的彩色图像（如红房子、绿草和蓝天）。



L_1 、L_2——双胶合物镜；P_0——物面；P_f——频谱面；P_i——毛玻璃

图 4　假彩色编码光路图及θ调制的物、频谱和像

【实验内容】

1. 设计一个制作光栅的光路；
2. 对物体不同区域进行θ调制；
3. 对物体进行曝光、显影、定影等处理，得到一θ调制的物体。

4. 按图 4 光路调整好编码处理系统，P_0、P_f、P_i 分别为物、谱、像面，并使系统等高共轴；
5. 在 P_0 上放物体，P_f 上放滤波器，选择编码的颜色，便可在 P_i 上看结果。

【思考题】

1. L_1、L_2 的作用是什么？各有什么要求？
2. 这种系统与实验的系统相比，在 Pi 面上的光振幅分布有差别吗？
3. 沿光轴移动 P_0，P_f 面是否也要作相应移动？
4. 只让零级通过，像面分布如何？

实验 3　周期函数的傅里叶分析

【实验原理】

在科学技术的各个领域，存在各种复杂的信号。不管信号多复杂都可以分解为不同频率的正弦分量。频谱函数描述了信号含有的正弦分量的频率和振幅的关系，是信号最基本的特性之一。因此各种信号可分解为一系列不同频率的正弦交流信号。

对于周期为 2π 函数 $f(t)$，满足狄利克雷条件，则可展开为傅里叶级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt).$$

其中傅里叶系数为

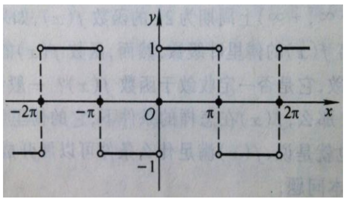
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt dt \qquad n=0,1,2\cdots$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt dt \qquad n=1,2,3\cdots$$

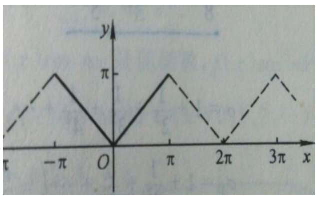
1. 如图 1 为周期为 2π，振幅为 1 的方波，其数学表达式为

$$f(t)=\begin{cases}-1, & (-\pi\le t<0)\\ 1, & (0\le t<\pi)\end{cases}$$

其傅里叶展开式为

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin(2\mathrm{n}-1)t\right]$$





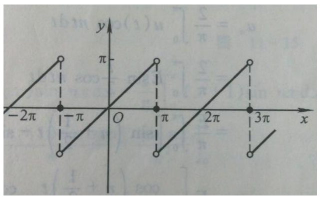


图 1 图 2 图 3

2. 如图 2 为周期为2π，振幅为π的三角波，其数学表达式为

$$f(t)=\begin{cases}-t, & (-\pi\le t<0)\\ \mathrm{t}, & (0\le t\le\pi)\end{cases}$$

其傅里叶展开式为

$$f(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos t+\frac{1}{3^2}\cos 3t+\frac{1}{5^2}\cos 5t+\cdots\right]$$

3. 如图 3 为周期为2π，振幅为π的锯齿波，其数学表达式为

$$f(t)=t\qquad(-\pi\le t<\pi)$$

其傅里叶展开式为

$$f(t)=2\left[\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin 3t-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt\right]$$

【实验内容】

1. 打开计算机点击 Cassy Leb 图标，进入应用程序及进行方波分析。
2. 分别进行方波，三角波和锯齿波的分析。
3. 利用 Mathematica 软件编程来模拟有限项傅里叶级数对于信号的逼近情况。

【附录】

设周期为2π的方波信号由以下函数给出

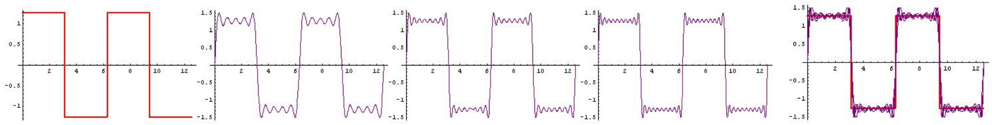
$$f(t)=\begin{cases}4/\pi, & 0\le t<\pi\\ -4/\pi, & \pi\le t<2\pi\end{cases}。$$

利用 Mathematica 软件符号运算及绘图功能，观察方形信号由有限项傅里叶级数

展开式的合成情况。利用 Mathematica 软件，编写程序如下：

```
Clear[s,f,n,k,x,t,a,b,A,B]
f[t_]:=Piecewise[{{4/Pi,0   t<Pi      ||      2*Pi   t<3*Pi},{-4/Pi,Pi   t<2*Pi      ||
3*Pi   t<4*Pi}}]
a[0]=Integrate[f[t],{t,0,2*Pi}]/Pi;
a[n_]:=Integrate[f[t]*Cos[n*t],{t,0,2*Pi}]/Pi
b[n_]:=Integrate[f[t]*Sin[n*t],{t,0,2*Pi}]/Pi
s[x_]:=a[0]/2+Sum[a[k]*Cos[k*x]+b[k]*Sin[k*x],{k,1,n}]
A=Plot[f[t],{t,0,4*Pi},PlotStyle   {RGBColor[1,0,0],Thickness[0.009]}]
Do[Plot[Evaluate[s[x]],{x,0,4*Pi},PlotStyle   {RGBColor[0.5,0,0.5]}],{n,10,20,5}]
T=Table[s[x],{n,10,20,5}];
B=Plot[Evaluate[T],{x,0,4*Pi},PlotStyle   {RGBColor[0.3,1,0.5]}]
Show[A,B]
```

输出结果为：



结论：

（1） 一个周期方波信号可以由频率成整数倍的正弦波谐波叠加而成。

（2） 随着谐波的增多，叠加而成的波形逐渐接近方波的形状。